第 11 卷　第 10 期
2006 年 10 月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 11, No. 10
Oct., 2006

区间算术和仿射算术的研究与应用

寿华好[1),2),3)]　王国瑾[1)]　沈　杰[3)]

1)(浙江大学计算机图象图形研究所，杭州　310027)　2)(浙江工业大学理学院应用数学系，杭州　310023)
3)(密歇根大学计算机与信息科学系，美国密歇根州　48128)

摘　要　综述了近几年来在计算机图形学及计算机辅助几何设计中得到广泛应用的区间算术、仿射算术及其修正形式——诸如矩阵或张量形式的修正仿射算术、递归 Taylor 方法的理论研究成果及应用情况，并对未来的研究方向和研究重点进行了探讨。

关键词　曲线曲面绘制　区间算术　仿射算术　修正仿射算术　递归 Taylor 方法

中图法分类号：TP391　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2006)10-1351-08

A Survey on Research and Applications of Interval Arithmetic and Affine Arithmetic

SHOU Hua-hao[1),2),3)], WANG Guo-jin[1)], SHEN Jie[3)]

1)(*Institute of Computer Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
2)(*Department of Applied Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310023)
3)(*Department of Computer & Information Science, University of Michigan-Dearborn, Michigan USA* 48128)

Abstract　A survey is given on interval arithmetic, affine arithmetic and their modifications such as the modified affine arithmetic in matrix or tensor form method as well as the recursive Taylor method and their applications in computer graphics and computer aided geometric design. Some future research directions and key issues are discussed.

Keywords　curve and surface plotting, interval arithmetic, affine arithmetic, modified affine arithmetic, recursive Taylor method

1　引　言

区间算术(interval arithmetic,简记为 IA)也称为区间分析(interval analysis),是定义在区间上的一组运算规则。其主要特点是能处理不确定数据，自动记录计算机浮点运算中所产生的截尾和舍入误差,高效而可靠地估计函数在某个自变量区域的取值范围,从而被广泛应用于自然科学的各个领域。区间算术兴起于 20 世纪 60 年代,从 20 世纪 80 年代初开始在计算机图形学(CG)及计算机辅助设计(CAD)领域得到重要应用。然而区间算术的缺点，是过于保守。为了解决这个问题,仿射算术(affine arithmetic，简记为 AA)作为区间算术的一种改进形式于 20 世纪 90 年代初被提了出来，近年来在曲线曲面绘制中得到更加广泛的应用。本文从计算机图形应用的角度,综述了区间、仿射算术及它们的改进形式即矩阵或张量形式的修正仿射算术和递归 Taylor 方法的理论研究成果,以及它们的特点、原理、地位、作用、局限性、发展史以及应用概况,并探讨了未来的研究方向和研究重点。

2　区间算术的缘起、特点及应用

有关区间作用的论述最早出现于 1924 年[1]和 1931 年[2],然后是在 1958 年[3]。而近代区间算术

基金项目:国家自然科学基金项目(60373033,60333010);国家重点基础研究“973”计划项目(2002CB312101)
收稿日期:2005-04-26;**改回日期**:2005-10-09

第一作者简介:寿华好(1964～　),男,副教授。2004 年在浙江大学获应用数学专业博士学位。主要研究方向为计算机辅助几何设计与计算机图形学。已发表学术论文 20 余篇。E-mail: shh@zjut.edu.cn

的兴起以 Moore 的博士论文[4]和他的两本书为标志[5,6]，书中主要讨论了在数值分析中用电子计算机处理浮点运算的误差问题。此后，有关区间算术的学术论文、专著、国际会议和各种软件开始大量涌现。

如果以 $*$ 表示加减乘除这 4 种基本运算之一，Moore 在文献[5]中给出区间算术的定义如下：$[a,b]*[c,d]=\{x*y \mid x\in[a,b], y\in[c,d]\}$。除法运算当 $0\in[c,d]$ 时也可进行[7]，但需要用到无穷区间。区间算术中的加法和乘法都满足交换律和结合律，但区间算术不满足分配律，只满足次分配律。

Alefeld 和 Herzberg[8]将区间算术应用于估计实多元多项式函数的界。这只要将函数中的自变量分别用区间来代替，并用区间算术运算规则计算函数就行了。一般来讲，这样得到的界往往比函数的实际取值范围大得多。但这样做的一个优点是很容易就得到了函数在整个自变量区域上的界，而且保证不会漏掉一个函数值。

Neumaier[9]将区间算术应用于求解区间线性方程组和区间非线性方程组。Ratschek 和 Rokne[10]，Hansen[11]，Kearfott[12]将区间算术应用于全局优化。

时至今日，区间算术几乎已被应用于自然科学的各个领域[13]，比如数学证明、线性系统、非线性系统，求积分、常微分方程的初值问题，偏微分方程的边界值问题，积分方程、化学工程、电子工程、动力系统和混沌学、控制理论、遥感和地理信息系统、专家系统、经济学、质量控制、统计报表纠错、数学物理中的计算机辅助证明、物理常数的计算、流体力学等等，在 CAD&CG 中的应用尤为广泛。

3 区间算术的局限及仿射算术的提出

区间算术的缺点就是过于保守，经区间算术运算所得到的区间常常比实际范围大得多，甚至到了毫无用处的地步，这个问题在一个接一个的区间运算的长计算链中尤其突出，会导致所谓的“误差爆炸”现象，而这样的长计算链在实际计算中经常出现。

为了解决区间算术这个过于保守的问题，Comba 和 Stolfi[14]提出了仿射算术的概念。与区间算术一样，仿射算术也能够自动记录浮点数的截尾和舍入误差，此外它还能自动记录各个不确定量之间的依赖关系，正是由于这个额外的信息，仿射算术能得到比区间算术紧得多的区间，特别在长计算链中优势更加明显。

在仿射算术里，一个不确定量 x（比如区间）用一个仿射形式 $\hat{x}$ 来表示，它是一些噪声元的线性组合：$\hat{x}=x_0+x_1\varepsilon+\cdots+x_m\varepsilon_m=x_0+\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i$，这里噪声元 ε_i 的值虽然未知，但假定它们落在范围 $[-1,1]$ 内。对应的系数 x_i 是实数，决定了噪声元 ε_i 的大小和符号。每一个 ε_i 表示对量 x 的总的不确定性起一定作用的一个独立的错误或误差源，它们可以是输入数据的不确定性、公式的截断误差、运算中的四舍五入误差等等。如果同样的噪声元 ε_i 出现在两个或更多个仿射形式（比如 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$）中，就意味着量 x 和 y 的不确定性之间具有某种联系和互相依赖性。

区间和仿射形式之间可以互相转换：给定一个表示量 x 的区间 $[\underline{x},\bar{x}]$，其对应的仿射形式 $\hat{x}$ 可以表示为

$$\hat{x}=x_0+x_1\varepsilon_x,\ x_0=(\underline{x}+\bar{x})/2,\ x_1=(\bar{x}-\underline{x})/2$$

反过来，给定一个仿射形式

$$\hat{x}=x_0+x_1\varepsilon_1+\cdots+x_m\varepsilon_m$$

其对应的区间为 $[\underline{x},\bar{x}]=[x_0-\xi,x_0+\xi]$，其中 $\xi=\sum_{i=1}^{m}|x_i|$。

给定两个仿射形式

$$\hat{x}=x_0+x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$$
$$\hat{y}=y_0+y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$$

假设 α 是实常数，令：

$$\hat{x}\pm\hat{y}=(x_0\pm y_0)+(x_1\pm y_1)\varepsilon_1+\cdots+(x_n\pm y_n)\varepsilon_n$$
$$\alpha\pm\hat{x}=(\alpha\pm x_0)+x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$$
$$\alpha\hat{x}=(\alpha x_0)+(\alpha x_1)\varepsilon_1+\cdots+(\alpha x_n)\varepsilon_n$$

从以上定义容易看到，如果

$$\hat{x}=[-1,1]=0+1\cdot\varepsilon_1$$
$$\hat{y}=[-1,1]=0+1\cdot\varepsilon_2$$

那么在仿射算术里 $\hat{x}-\hat{x}=0$ 而 $(2\hat{x}+\hat{y})-\hat{x}=\hat{x}+\hat{y}=0+\varepsilon_1+\varepsilon_2=[-2,2]$，然而在区间算术里，其结果分别是 $[-2,2]$ 和 $[-4,4]$。显然，仿射算术所得到的结果比区间算术要精确。

两个仿射形式 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 的乘积产生一个关于噪声元 ε_i 的二次多项式：

$$\hat{x}\times\hat{y}=\left(x_0+\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\right)\times\left(y_0+\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i\right)$$

Comba 和 Stolfi[14]给出了将其化为新仿射形式的一个方法。首先展开上式得到：

$$\hat{x}\times\hat{y}=x_0y_0+\sum_{i=1}^{n}(x_0y_i+y_0x_i)\varepsilon_i+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i\right)$$

为得到新的线性表示式,把上式最后关于噪声元 ε_i 的一个二次项用新的具有系数 uv 的噪声元 ε_k 来代替,这里 $u=\sum_{i=1}^{n}|x_i|, v=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$。这样,$\hat{x}\times\hat{y}$ 就能表为噪声元 ε_i 加上新噪声元 ε_k(其值仍在 $[-1,1]$ 内变化)的一个一次多项式(仿射组合),即 $\hat{x}\times\hat{y}=x_0y_0+\sum_{i=1}^{n}(x_0y_i+y_0x_i)\varepsilon_i+uv\varepsilon_k$,从而使得 $\hat{x}\times\hat{y}$ 仍是一个仿射形式。

仿射算术作为区间算术的一种改进形式,一经提出即被广泛应用于计算机辅助设计和图形学领域,比如隐式曲面求交[15]、隐式曲面绘制[16]、光线投射[17]、光线跟踪[18]、层次光照取样[19],CSG 实体造型系统中隐式多项式曲面的定位[20]、参数物体的线性区间估计[21]、参数曲面的包围盒计算[22]、参数曲面求交[23,24]、快速和可靠的隐式曲线绘制[25]、用带形树逼近参数曲线[26]、基于集合论的 CSG 几何实体造型系统的布尔运算[27]等等。

4　仿射算术的局限性及其修正

虽然仿射算术通常能得到比区间算术精确的结果,然而仍然有过于保守的缺陷。举例来说,假设

$$\hat{x}=0+\varepsilon_1+\varepsilon_2$$
$$\hat{y}=0+\varepsilon_1-\varepsilon_2$$

则 $\hat{x}\times\hat{y}$ 的变化范围应该是

$$\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2=[0,1]-[0,1]=[-1,1]$$

然而如果按上节中定义的仿射算术进行运算的话,结果是 $[-4,4]$,扩大了 4 倍。产生这个保守结果的根本原因,在于仿射算术的乘法运算不够精确。此外,仿射算术也不满足分配律,例如在仿射算术里 $\hat{x}\times(\hat{y}-\hat{y})=0$,但 $\hat{x}\times\hat{y}-\hat{x}\times\hat{y}\neq 0$。为了克服这些局限性,Zhang 和 Martin[28] 提出了一种仿射算术的改进形式并把它应用于代数曲线绘制,不过该方法后来被发现包含有错误。Shou 等人[29] 发现,在标准形式的仿射算术中,乘法运算仍然有很大的误差。为改进运算的精确度,他们提出了更为精确的矩阵形式的一种新的修正仿射算术,并进一步从理论上证明了[30]矩阵形式的修正仿射算术比中心形式上的区间算术要精确,而中心形式上的区间算术比仿射算术要精确,从而矩阵形式的修正仿射算术比其余两种算术都要精确。为检验各种仿射算术的效率,寿华好[31]在基于平面场细分的代数曲线逐点绘制的应用中,对矩阵形式和标准形式的仿射算术进行了详细比较,其结果显示,前者比后者有更高的精确度和更快的运算速度。

在上述工作的基础上,Shou 等人[32]进一步把 2 维矩阵形式的修正仿射算术推广到 3 维张量形式,并在基于空间区域细分的代数曲面逐点绘制的应用中,对张量形式和标准形式的仿射算术进行了详细比较,其结果显示,张量形式的修正仿射算术不但比标准形式的仿射算术更为精确而且速度更快,从而得出结论:矩阵或张量形式的修正仿射算术是比标准形式的仿射算术更好的估计多项式函数值的方法,在几何计算中前者完全可以取代后者。图 1 和图 2 显示的是分别用标准形式的仿射算术和张量形式的修正仿射算术绘制的心脏面。

图 1　用标准仿射算术绘制的心脏面

Fig. 1　Heart surface plotted using standard affine arithmetic

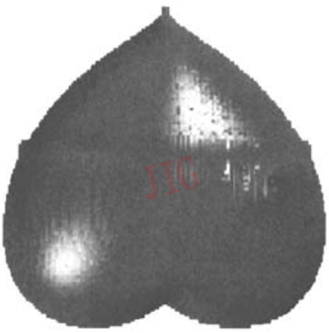

图 2　用张量形式的修正仿射算术绘制的心脏面

Fig. 2　Heart surface plotted using modified affine arithmetic in tensor form

此外,为了考核新工具的优越性,Martin 等人[33]对基于平面区域细分的代数曲线逐点绘制算法中所应用的矩阵形式的修正仿射算术和其他各种区间方法进行了详细比较,参加比较的方法有幂基形式上的区间算术、Bernstein 基形式上的区间算术、中心形式上的区间算术、Horner 形式上的区间算术、矩阵形式的修正仿射算术、Bernstein 凸包方法、Taubin 方法、Rivlin 方法、Gopalsamy 方法以及上述各个方法加上导数信息后的改良方法。比较结果显示,矩阵形式的修正仿射算术、中心形式上的区间算术,Taubin 方法、Rivlin 方法与 Bernstein 凸包方法是一些相对较好的方法;并进一步发现 Taubin 方法实际上就是中心形式上的区间算术方法,而矩阵形式的修正仿射算术与中心形式上的区间算术方法虽然非常类似,但前者考虑了多项式每一项幂次的奇偶性,后者没有考虑这种奇偶性,从而前者比后者或 Taubin 方法更为精确。

与此同时,Shou 等人[34]又提出了一种新的用于估计二元或三元多项式取值范围的递归 Taylor 方法,并结合点取样技术和子像素(子体素)技术,将其应用于基于平面或空间区域细分的代数曲线曲面逐点绘制算法中,而且与矩阵或张量形式的修正仿射算术进行了详细比较,其结果显示,在大多数情况下,前者的精度与后者类似,有时更高一些,而且所需要的四则运算(加减乘除)次数比后者少;此外,2 维和 3 维的递归 Taylor 方法可以很容易地推广为 N 维递归 Taylor 方法。从而得出结论:递归 Taylor 方法不失为是一种简单有效、很有竞争力的估计多项式取值范围的方法。

5 区间算术与仿射算术在 CG & CAD 中的地位、应用和研究进展

由于数值分析的内在需求,区间算术在 20 世纪 60 年代初一经提出[4]后,就被广泛应用于自然科学的各个领域。至于在 CAD&CG 中的应用则始于 20 世纪 80 年代初期。

Mudur 和 Koparkar[35]在 1984 年首次将区间算术应用于几何计算,他们在曲线化直估计、曲面化平估计、参数曲面求交、参数曲面轮廓线检测、参数曲面绘制的光照强度计算中,成功地使用了区间算术,并提出了基于区间算术的一个通用细分算法用于几何计算。Toth[36]将区间算术应用于参数曲面光线跟踪,主要解决光线与曲面求交所需求解的一元非线性方程 Newton 迭代法的初始值选取问题。此后,Sederberg 和 Parry[37]将基于区间算术的参数曲线求交算法与其他求交算法进行了比较。

Suffern 和 Fackerell[38]在二元函数等高线绘制的四叉树算法中,Suffern[39]在隐式曲面绘制的八叉树算法中,都引入区间算术技术,取代原先不够可靠的点取样技术,从而彻底解决了算法的可靠性问题。Lopes 等人[40]进一步提出了平面隐式曲线多边形逼近的一个自适应算法,它能根据曲线的曲率变化自动执行细分操作,并由区间算术和自动微分保证稳定性。

特别应当提及的是,1992 年,文献[41]、[42]同时把区间算术应用于图形计算和实体造型中,表明区间算术是几何设计和图形学的重要工具之一。文献[41]提出了基于区间算术的算法 SOLVE 与 MINIMIZE,前者计算约束条件的解,后者计算约束条件下函数的整体最小值。算法的关键是对每个约束条件以及目标函数,构造各自的包含函数(inclusion function),用于计算函数在某个区域上的界,使得求约束条件的解以及求约束条件下最小值的 branch & bound 方法成为可能;包含函数也克服了以往数值分析方法只能计算函数局部最小值的局限。进一步,这些基本算法还被发展为逼近隐式曲线的一个新的区间算法。这些基本算法可被应用于图形学中更一般的问题,比如光线跟踪、碰撞检测、参数曲面的多边形分解、以参数曲面为边界曲面的 CSG 实体等等;文献[42]提出了带或不带反走样的基于区间算术的一种递归细分算法用于绘制隐式曲面所表示的 CSG 组合实体。相关算法同样可用来解决运动模拟中的碰撞检测问题,或计算物体的质量、重心、角动量以及牛顿力学中的其他积分量。该算法的特点是运行时间与所需考虑的体素个数即场景的复杂程度几乎无关,同时,碰撞检测和积分量的计算绝对可靠,没有一个碰撞会因数值误差而漏检,此外,它能提供包含精确积分量的一个可靠的界。

用较简单的函数形式,或较低次的多项式函数形式,或只需较少数据就能表达的函数形式去逼近 CAD 系统中所使用的曲线曲面,一直是国际学术界感兴趣的一个课题,该研究方向的基本动力来源于采用不同函数表达式的各种 CAD/CAM 系统之间数据交换的实际需要。举例来说,一些 CAD/CAM 系统只使用多项式函数(而不是有理函数),或限制了

所使用的多项式次数。但大多数逼近方法只考虑了使逼近误差最小,控制在事先给定的某一误差限内,却没有记录逼近误差的详细信息,带到另一个CAD/CAM系统的应用程序中去,而这种信息也许是非常重要的,不可忽略,比如在机械零件的公差分析中就是如此。为详细记录并传递这种误差信息,Sederberg 和 Farouki[43]首次提出区间 Bézier 曲线的概念,并成功地应用于曲线曲面逼近,达到了在逼近的同时记录并传递逼近误差信息的目的。Maekawa[44]将区间算术应用于几何造型。Schramm[45]将区间算术应用于参数曲面求交。近年来,寿华好等人[46~48]进一步研究了区间 Bézier 曲线的边界结构,证明了 n 次区间 Bézier 曲线的边界必由分段 n 次 Bézier 曲线和平行于坐标轴的直线段所组成,而 $n\times m$ 次区间 Bézier 曲面的边界必由分片 $n\times m$ 次裁剪区间 Bézier 曲面片,母线平行于坐标轴的柱面片和平行于坐标平面的矩形平面片组成。他们还探讨了区间 Bézier 曲线曲面和等距曲线曲面之间的关系。刘利刚等人[49]研究了区间 Bézier 曲面的逼近问题。Lin 等人[50]进一步解决了空间 Bézier 曲线的边界结构问题。陈效群[51]利用区间曲线逼近等距曲线和有理曲线。Chen 和 Lou[52]研究了区间 Bézier 曲线的降阶逼近. Chen 和 Deng[53]研究了有理曲线的区间隐式化问题。

区间算术技术在真实感图形绘制的光线跟踪算法方面得到许多成功的应用,并在应用中得以发展。Giger[54],Mitchell[55,56]在光线与曲面求交计算的迭代过程中使用区间算术,使计算过程非常可靠。但由于区间算术在迭代步骤中使用,计算仍然很费时间。Enger[57]提出了基于区域分治思想的一个区间算法用于参数曲面的光线跟踪,极大地减少了光线和曲面的求交计算量,使光线跟踪的速度比传统方法提高了 1.5 倍到 3 倍。该方法的要点是计算有关曲面部分颜色值的一个区间,若此区间足够小,那么属于这个曲面部分的所有像素都具有这个颜色值。该方法的缺点是只考虑了 3 次 B 样条曲面。Barth[58]将区间算术应用于一般参数曲面的光线跟踪,其基本思想是首先将曲面自适应地分解为各小面片,小面片的几何信息由二叉树的数据结构来表达,然后应用区间算术计算小面片的包围盒,从线性逼近和有关偏导数的区间可以构造出符合曲面部分走向和形状的相当精致的平行六面体包围盒,这就使得以前只能用于 Bézier 曲面和 B 样条曲面的光线跟踪算法(在那里包围盒由凸包性质生成)可以被使用于一般的参数曲面,包围盒的二叉树只需要在开始的时候计算一次就够了,因而光线与曲面的求交过程大大加快。

区间算术在区间几何元素求交的稳定性控制方面发挥了积极的作用。Hu 等人[59]提出了计算两个平面区间多项式曲线之交的一个稳定算法,既包括良性条件下的穿越式相交情形,也包括病态条件下的相切或重合情形。该算法的关键是把求交问题转化为求解 n 个变量 m 个方程的区间非线性多项式方程组。以前运行于截尾区间算术状态下,基于 Bernstein 细分方法且针对平衡系统的区间非线性多项式方程组求解被推广到了一个非平衡系统的求解情形。Hu 等人[60]引入并推广了一个弯曲实体的区间几何表示。这种表示基于截尾区间算术,目的是解决运行于浮点算术的边界表示实体造型系统的不稳定性问题,包括拓扑不兼容性(例如沟和不正确的交集的产生)、关联不对称性和关联不可传递性。为此,激发了区间多项式样条曲线曲面概念的诞生。此外,用来处理区间几何体的基于图形的一个数据结构被提了出来,并被推广到表示非流形实体。Hu 等人[61]设计了流形或非流形实体模型的边界运算(并、交、差)实现过程,这种运算建立在区间几何表示和几何实体图形表示的数据结构之上。他们首先引入了 2 维区间实体的边界运算,然后重点建立基于顶点、边、面和壳节点优化基础之上的 3 维区间实体的边界运算,并给出实例具体说明了这个实体边界运算方法。Hu 等人[62]还提出了计算区间多项式曲线与曲面之交集、区间多项式曲面与曲面之交集的稳定算法,既包括了良性条件下的穿越式相交情形,也包括病态条件下的非穿越式相交情形。算法的关键是把求交问题转化为求解平衡或不平衡区间非线性多项式方程组,这些方程组是用一系列早期文献中所提出的基于 Bernstein 细分方法和截尾区间算术的区间非线性多项式方程组来求解的。该方法保证了结果的数值确定性和可检验性。此外,他们对退化区间多项式曲线与曲面、退化区间多项式曲面与曲面在病态条件下的非穿越式相交情形,也进行了理论分析。Tuohy 等人[63]提出了用区间 B 样条曲线曲面来插值或拟合测量数据集合的一个高效而可靠的方法。一般来讲,测量数据由于测量工具的精度不同以及测量时读数的误差带有不确定性,它们可以用一个区间来表示。Tuohy 等人提出

的插值或拟合的方法能够产生紧密包含原测量数据区间的区间几何体;在插值的情形下,所得到的是非常紧密的结果;而在拟合的情形下,所得到的紧密程度取决于所容许的控制顶点的数目。

区间算术与 CSG 实体造型系统也有密切联系。Berchtold 等人[64~66]将区间算术应用于多变量 Bernstein 多项式,以改善基于集合论的 CSG 实体造型系统的精度和效率。Bowyer 等人[67]对一个基于集合论的 CSG 实体造型系统,在基本体素所使用的多变量隐式函数的定位、简化和求根过程中使用了区间算术。他们讨论了 3 个问题:(1)半代数集合曲面的定位和简化;(2) Newton-Raphson 方法的区间推广;(3)区间光线跟踪。

传统区间算术的局限性仍在被不断发现和克服。Tupper 提出了依据 2 维隐式方程和不等式可靠地绘制几何图形的一系列新算法[68],通过绘图实例和理论分析,指出传统的区间算术有一定的局限性,如果不加分析地使用会产生不正确的结果,从而需要改进成为广义的区间算术[69]也称为 Tupper 区间算术。

在离散几何[70]中,一个连续的 3 维几何体被表示为由体素组成的一个 3 维网格,在医学图像处理(比如 MRI,CT)中非常有用。体素化常常用来加速光线跟踪和辐射度计算。体素化过程就是把空间曲面转换为体素的一种变换。其基本要求是使得曲面都包含在体素内,而不能够遗漏曲面的任何一部分。步进的体素化方法虽然很有效,但是往往达不到稳定性要求。Stolte 和 Caubet[71]通过实例比较,指出使用区间算术的体素化方法最有效。Stolte 和 Kaufman[72]还提出了基于空间八叉树细分和区间算术的隐式曲面体素化及绘制的一种稳定算法。

由以上述评可见,在计算机辅助设计和计算机图形学领域,区间算术已逐渐受到重视与重用;尤其在曲线曲面的几何逼近和几何运算中,凡有关几何误差和计算可靠性或稳定性的场合,区间算术技术都可被选择作为解决问题的一个有效途径。

6 研究动向的预测

估计多项式在某一区间上的取值范围是几何图形系统的一种基本操作。为此,寻找比修正仿射算术和递归 Taylor 方法更好的方法,是今后研究工作的一个中心点。对该问题的研究意义十分重大,因为实际上它是区间分析的基础算法,只要是用到区间算术的地方都要用到它,特别在计算机辅助几何设计、图形学与全局优化等领域有至关重要的作用。

研究表明,到目前为止,修正仿射算术和递归 Taylor 方法是估计多项式在某一区间上取值范围的较好方法,然而它们在 CAD & CG 领域中的应用还远未全面展开。接下来的任务是将修正仿射算术和递归 Taylor 方法深入应用到区间算术能发挥作用的地方。比如说,在计算机辅助设计中,应用到 B-Rep 或者 CSG 实体造型系统中,用这两种技术代替区间算术或仿射算术,并进行比较研究;在计算机图形学中,针对基于区间算术的光线跟踪算法,用这两种技术代替区间算术或仿射算术,并比较效率和精度;在非线性规划中,针对全局优化问题的区间 Branch & Bound 算法,用这两种技术代替区间算术或仿射算术,并进行比较研究,等等。

递归 Taylor 方法本身还有一些理论问题需要深入探讨,特别是对多项式使用递归 Taylor 方法和修正仿射算术方法所得到的区间,以及两种方法所包含的运算次数,都要进行理论上的分析比较,实际试验方面也还有许多工作要做。

曲线曲面的等距映射是一个相当重要的几何运算。因此,另外一个值得研究的方向是如何将基于场细分和范围分析的隐式曲线曲面(或代数曲线曲面)绘制方法应用于等距曲线曲面的绘制中。

到目前为止,国内外学术界的研究工作主要集中于高效而精确地估计多项式函数在某一区间上的取值范围,这方面已经提出了很多方法,但是对于一般函数取值范围估计的方法还不是很多,国际上目前比较引人注目的是 Martin Berz 等人[73]于 1998 年提出的 Taylor 模型。Taylor 模型是目前国际学术界研究的热点之一,从 2002 年开始每年都有专门的国际会议在美国召开。因此接下来要做的工作是对 Taylor 模型进行更深入的研究,并寻找一种比 Taylor 模型更好的能高效而精确地估计一般函数在某一区间上取值范围的新方法,并把它应用于 CAD & CG 中。当然,对该问题的研究难度可能较大。

参考文献(References)

1 Burkill J C. Functions of intervals[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1924, **22**(2): 375 ~ 446.

2 Young R C. The algebra of many-valued quantities [J]. Mathematische Annalen, 1931, **104**(1): 260 ~ 290.

3 Sunaga T. Theory of an interval algebra and its application to

numerical analysis[A]. In: RAAG Memoirs[C], Tokyo, Japan, 1958, **2**: 29～46.

4 Moore R E. Interval Arithmetic and Automatic Error analysis in digital computing[D]. Stanford: Stanford University, 1962.

5 Moore R E. Interval Analysis[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1966.

6 Moore R E. Methods and Applications of Interval Analysis[M]. Philadelphia: SIAM, 1979.

7 Milne P S. On the Algorithms and Implementation of a Geometric Algebra System[D]. Bath, England: University of Bath, 1990.

8 Alefeld G, Herzberg J. Introduction to Interval Computation[M]. New York: Academic Press, 1983.

9 Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

10 Ratschek H, Rokne J. New Computer Methods for Global Optimization[M]. New York: Wiley, 1988.

11 Hansen E R. Global Optimization Using Interval Analysis[M]. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992.

12 Kearfott R B. Rigorous Global Search: Continuous Problems[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

13 Kearfott R B. Interval computations: introduction, uses, and resources[J]. Euromath Bulletin, 1996, **2**(1): 95～112.

14 Comba J L D, Stolfi J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics[A]. In: Proceedings of Anais do VII SIBGRAPI[C], Recife, Brazil, 1993: 9～18.

15 De Figueiredo L H. Surface intersection using affine arithmetic[A]. In: Proceedings of Graphics Interface[C], Toronto, Ontario, Canada, 1996: 168～175.

16 De Figueiredo L H, Stolfi J. Adaptive enumeration of implicit surfaces with affine arithmetic[J]. Computer Graphics Forum, 1996, **15**(5): 287～296.

17 De Cusatis A Jr, De Figueiredo L H, Gattass M. Interval methods for ray casting implicit surfaces with affine arithmetic[A]. In: XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing[C], Campinas, Brazil, 1999: 65～71.

18 Heidrich W, Seidel H P. Ray tracing procedural displacement shaders[A]. In: Proceedings of Graphics Interface[C], Vancouver, British Columbia, Canada, 1998: 8～16.

19 Heidrich W, Slusallek P, Seidel H P. Sampling of procedural shaders using affine arithmetic[J]. ACM Transactions on Graphics, 1998, **17**(3): 158～176.

20 Voiculescu I, Berchtold J, Bowyer A, *et al.* Intrval and affine arithmetic for surface location of power and Bernstein form polynomials[A]. In: Mathematics of Surfaces IX[M], London: Springer, 2000: 410～423.

21 Bühler K. Linear interval estimations for parametric objects theory and application[J]. Computer Graphics Forum, 2001, **20**(3): 522～531.

22 Bühler K. Taylor models and affine arithmetics-towards a more sophisticated use of reliable arithmetics in computer graphics[A]. In: Proceedings of the 17th Spring Conference in Computer Graphics (SCCG'01)[C], Budmerice, Slovakia, 2001: 40～48.

23 Bühler K, Barth W. A new intersection algorithm for parametric surfaces based on linear interval estimations[A]. In: Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods[M], Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2001: 179～190.

24 Bühler K. A new subdivision algorithm for the intersection of parametric surfaces[D]. Vienna: Vienna University of Technology, 2001.

25 Bühler K. Fast and reliable plotting of implicit curves[A]. In: Uncertainty in Geometric Computations[M], Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2002: 15～28.

26 De Figueiredo L H, Stolfi J, Velho L. Approximating parametric curves with strip trees using affine arithmetic[J]. Computer Graphics Forum, 2003, **22**(2): 171～179.

27 Bowyer A, Martin R, Shou H, *et al.* Affine intervals in a CSG geometric modeler[A]. In: Uncertainty in Geometric Computations[M], Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2002: 1～14.

28 Zhang Q, Martin R R. Polynomial evaluation using affine arithmetic for curve drawing[A]. In: Proceedings Eurographics UK Conference[C], Abingdon, UK, 2000: 49～56.

29 Shou H, Martin R, Voiculescu I, *et al.* Affine arithmetic in matrix form for polynomial evaluation and algebraic curve drawing[J]. Progress in Natural Science, 2002, **12**(1): 77～80.

30 Shou H, Lin H, Martin R, *et al.* Modified affine arithmetic is more accurate than centered interval arithmetic or affine arithmetic[A]. In: Lecture Notes in Computer Science 2768, Mathematics of Surfaces X[M], Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2003: 355～365.

31 Shou Hua-hao. Subdivision Methods for Plotting Implicit Curves and Surfaces[D]. Hangzhou: Department of Mathematics, Zhejiang University, 2004. [寿华好. 基于场细分的隐式曲线曲面绘制算法研究[D]. 杭州:浙江大学数学系, 2004.]

32 Shou H, Lin H, Martin R, *et al.* Modified affine arithmetic in tensor form[A]. In: Proceedings of International Symposium on Computing and Information[C], Zhuhai, China, 2004, **2**: 642～646.

33 Martin R, Shou H, Voiculescu I, *et al.* Comparison of interval methods for plotting algebraic curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, **19**(7): 553～587.

34 Shou H, Martin R, Wang G, *et al.* A recursive Taylor method for algebraic curves and surfaces[A]. In: Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces[M], Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005: 135～155.

35 Mudur S P, Koparkar P A. Interval methods for processing geometric objects[J]. IEEE Computer Graphics and its Applications, 1984, **4**(2): 7～17.

36 Toth D L. On ray tracing parametric surfaces[J]. Computer Graphics, 1985, **19**(3): 171～179.

37 Sederberg T W, Parry S R. Comparison of three curve intersection algorithms[J]. Computer Aided Design, 1986, **18**(1): 58～63.

38 Suffern K G, Fackerell E D. Interval methods in computer graphics[J]. Computers and Graphics, 1991, **15**(3): 331～340.

39 Suffern K G. Quadtree algorithms for contouring functions of two variables[J]. The Computer Journal, 1990, **33**(5): 402～407.

40 Lopes H, Oliveira J B, de Figueiredo L H. Robust adaptive polygonal

approximation of implicit curves[J]. Computers & Graphics, 2002, **26**(6): 841 ~ 852.
41 Snyder J M. Interval analysis for computer graphics[J]. Computer Graphics, 1992, **26**(2): 121 ~ 130.
42 Duff T. Interval arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry[J]. Computer Graphics, 1992, **26**(2): 131 ~ 138.
43 Sederberg T W, Farouki R T. Approximation by interval Bézier curves[J]. IEEE Computer Graphics & Applications, 1992, **12**(5): 87 ~ 95.
44 Maekawa T. Robust Computational Methods for Shape Interrogation [D]. Massachussetts: Massachussetts Institute of Technology, Department of Ocean Engineering, 1994.
45 Schramm P. Intersection problems of parametric surfaces in CAGD [J]. Computing, 1994, **53**(3-4): 355 ~ 364.
46 Shou H. Interval Curves & Surfaces and Their Applications[D]. Hangzhou: Department of Mathematics, Zhejiang University, 1998. [寿华好. 区间曲线曲面理论及其应用[D]. 杭州: 浙江大学数学系, 1998.]
47 Shou Hua-tao, Wang Guo-jin. Boundary of interval Bézier curve[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 1998, **13A** (Supplement issue): 37 ~ 44. [寿华好, 王国瑾. 区间 Bézier 曲线的边界[J]. 高校应用数学学报, 1998, **13A**(增刊): 37 ~ 44.]
48 Shou Hua-tao, Wang Guo-jin. Relations between interval curves/surfaces and offset curves/surfaces [J]. Journal of Engineering Graphics, 1998, **19**(3): 55 ~ 59. [寿华好, 王国瑾. 区间曲线/曲面与 Offset 曲线/曲面之间的关系[J]. 工程图学学报, 1998, **19**(3): 55 ~ 59.]
49 Liu Li-gang, Wang Guo-jin, Shou Hua-hao. Approximation by interval Bézier surfaces[J]. Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 2000, **12**(9): 645 ~ 650. [刘利刚, 王国瑾, 寿华好. 区间 Bézier 曲面逼近[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, **12**(9): 645 ~ 650.]
50 Lin H, Liu L, Wang G. Boundary evaluation for interval Bézier curve [J]. Computer Aided Design, 2002, **34**(9): 637 ~ 646.
51 Chen Xiao-qun. Interval Bézier Curve and Surface Modeling[D]. Hefei: Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, 1999. [陈效群. 区间 Bézier 曲线曲面造型[D]. 合肥: 中国科学技术大学数学系, 1999.]
52 Chen F, Lou W. Degree reduction of interval Bézier curves[J]. Computer Aided Design, 2000, **32**(10): 571 ~ 582.
53 Chen F, Deng L. Interval implicitization of rational curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, **21**(4): 401 ~ 415.
54 Giger C. Ray tracing polynomial tensor product surfaces[A]. In: Proceedings of Eurographics[C], North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo: Elsevier Science Publishers, 1989: 125 ~ 136.
55 Mitchell D P. Robust ray intersection with interval arithmetic[A]. In: Proceedings of Graphics Interface[C], Halifax, Nova Scotia, Canada, 1990: 68 ~ 74.
56 Mitchell D P. Three applications of interval analysis in computer graphics[A]. In: Frontiers of Rendering, SIGGRAPH '91 Course Notes[C], Las Vegas, Nevada, USA, 1991: 14-1 ~ 14-13.
57 Enger W. Interval ray tracing—a divide and conquer strategy for realistic computer graphics[J]. The Visual Computer, 1992, **9**(2): 91 ~ 104.
58 Barth W, Lieger R, Schindler M. Ray tracing general parametric surfaces using interval arithmetic[J]. The Visual Computer, 1994, **10**(7): 363 ~ 371.
59 Hu C, Maekawa T, Sherbrooke E C, *et al.* Robust interval algorithm for curve intersections[J]. Computer Aided Design, 1996, **28**(6-7): 495 ~ 506.
60 Hu C, Patrikalakis N M, Ye X. Robust interval solid modeling. Part I. Representations[J]. Computer Aided Design, 1996, **28**(10): 807 ~ 817.
61 Hu C, Patrikalakis N M, Ye X. Robust interval solid modeling. Part II. Boundary evaluation [J]. Computer Aided Design, 1996, **28**(10): 819 ~ 830.
62 Hu C, Maekawa T, Patrikalakis N M, *et al.* Robust interval algorithm for surface intersections [J]. Computer Aided Design, 1997, **29**(9): 617 ~ 627.
63 Tuohy S T, Maekawa T, Shen G, *et al.* Approximation of measured data with interval B-splines[J]. Computer Aided Design, 1997, **29**(11): 791 ~ 799.
64 Berchtold J. The Bernstein form in Set-Theoretic Geometric Modeling [D]. Bath: University of Bath, 2000.
65 Berchtold J, Voiculescu I, Bowyer A. Interval Arithmetic Applied to Multivariate Bernstein-form Polynomials [R]. TR31/98, Bath: School of Mechanical Engineering, University of Bath, 1998.
66 Berchtold J, Bowyer A. Robust arithmetic for multivariate Bernstein-form polynomials[J]. Computer Aided Design, 2000, **32**(11): 681 ~ 689.
67 Bowyer A, Berchtold J, Eisenthal D, *et al.* Interval methods in geometric modeling[A]. In: Proceedings of Geometric Modeling and Processing 2000 [C], Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2000: 321 ~ 327.
68 Tupper J. Realiable two-dimensional graphing methods for mathematical formulae with two free variables[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'2001[C], New York: ACM Press, 2001: 77 ~ 86.
69 Tupper J. Graphing Equations with Generalized Interval Arithmetic [D]. Toronto: University of Toronto, 1996.
70 Rosenfeld A, Melter R A. Digital geometry[J]. The Mathematical Intelligencer, 1989, **11**(3): 69 ~ 72.
71 Stolte N, Caubet R. Comparison between different rasterization methods for implicit surfaces[A]. In: Visualization and Modeling [M], San Diego: Academic Press, 1997: 191 ~ 201.
72 Stolte N, Kaufman A. Novel techniques for robust voxelization and visualization of implicit surfaces [J]. Graphical Models, 2001, **63**(6): 387 ~ 412.
73 Berz M, Hoffstätter G. Computation and application of Taylor polynomials with interval remainder bounds[J]. Reliable Computing, 1998, **4**(1): 83 ~ 97.